GEOMETRIA DIFERENCIAL - FICHA 2

JOÃO PEDRO MARTINS DOS SANTOS

1.

Considere-se a carta (φ, U), onde $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : z \neq 0\}$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\varphi([x : y : z]) = (x/z, y/z)$. Para $(x, y) \in \mathbb{R}$ tem-se $\left(\Phi \circ \varphi^{-1}\right)(x, y) = \dfrac{(y, x, xy)}{1 + x^2 + y^2}$, logo $\Phi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, ou seja, Φ é diferenciável em U. Analogamente prova-se que Φ é diferenciável em $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x \neq 0\}$ e em $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : y \neq 0\}$, logo Φ é diferenciável em $\mathbb{P}^2$. A matriz jacobiana de $\Phi \circ \varphi^{-1}$ é:

$$\begin{bmatrix} -2xy/(1+x^2+y^2)^2 & (1+x^2-y^2)/(1+x^2+y^2)^2 \\ (1-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)^2 & -2xy/(1+x^2+y^2)^2 \\ y(1-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)^2 & x(1+x^2-y^2)/(1+x^2+y^2)^2 \end{bmatrix}$$

E uma matriz proporcional a esta é:

$$\begin{bmatrix} -2xy & 1+x^2-y^2 \\ 1-x^2+y^2 & -2xy \\ y(1-x^2+y^2) & x(1+x^2-y^2) \end{bmatrix}$$

A aplicação Φ é uma imersão em $\varphi^{-1}(x, y)$ se e só se essa matriz tiver característica 2, ou seja, não é uma imersão se e só se:

$$\begin{vmatrix} -2xy & 1+x^2-y^2 \\ 1-x^2+y^2 & -2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2xy & 1+x^2-y^2 \\ y(1-x^2+y^2) & x(1+x^2-y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2+y^2 & -2xy \\ y(1-x^2+y^2) & x(1+x^2-y^2) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2-1 = y(1+x^2-y^2)(1+x^2+y^2) = x(1-x^2+y^2)(1+x^2+y^2) = 0$$

De $(x^2 + y^2)^2 - 1 = 0$ vem $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, $1 + x^2 + y^2 = 2$, logo as outras duas equações ficam $y(1 + x^2 - y^2) = x(1 - x^2 + y^2) = 0$, ou seja, $y(1 + x^2 - (1 - x^2)) = x(1 - (1 - y^2) + y^2) = 0$, ou seja, $2x^2y = 2y^2x = 0$, logo $x = 0$ ou $y = 0$, e como $x^2 + y^2 = 1$, então tem-se $(x, y) = (\pm 1, 0)$ ou $(x, y) = (0, \pm 1)$, e estes pontos correspondem aos pontos $[\pm 1 : 0 : 1]$ e $[0 : \pm 1 : 1]$. Analogamente (isto é, trocando os papéis das variáveis x, y e z) prova-se que os restantes pontos em $\mathbb{P}^2$ nos quais Φ não é uma imersão são os pontos $[\pm 1 : 1 : 0]$.

Conclui-se que Φ é uma imersão excepto nos seguintes seis pontos: $[0 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : -1]$, $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 0 : -1]$, $[1 : 1 : 0]$ e $[1 : -1 : 0]$.

2.

Como (N, Φ) é uma subvariedade de M, então $\Phi : N \to M$ é uma imersão injectiva, logo $\Phi : N \to M$ é uma aplicação contínua e injectiva.
Seja C um subconjunto fechado de N. Como N é compacto, então C é compacto. Como $\Phi : N \to M$ é contínua e C é compacto, então $\Phi(C)$ é um subconjunto compacto de M, e como M é Hausdorff, então $\Phi(C)$ é um subconjunto fechado de M.
Conclui-se que $\Phi : N \to M$ é uma aplicação fechada.
Como $\Phi : N \to M$ é uma aplicação contínua, injectiva e fechada, então $\Phi : N \to \Phi(N)$ é simultaneamente uma bijecção contínua e uma aplicação fechada, logo $\Phi : N \to \Phi(N)$ é um homeomorfismo, ou seja, $\Phi : N \to M$ é um mergulho, logo (N, Φ) é uma subvariedade mergulhada.

3.

Suponha-se que existe uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\mathbb{R}) = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$. Sejam $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projecções na primeira e na segunda coordenadas, respectivamente. Como Φ, π_1 e π_2 são aplicações diferenciáveis, então $\pi_1 \circ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\pi_2 \circ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são aplicações diferenciáveis. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(t_0) = (0, 0)$. Tem-se $(\pi_2 \circ \Phi)(t) = |(\pi_1 \circ \Phi)(t)|$ para $t \in \mathbb{R}$, logo:

$(\pi_2 \circ \Phi)'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\pi_2(\Phi(t_0 + h)) - \pi_2(\Phi(t_0))}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\pi_2(\Phi(t_0 + h))}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|\pi_1(\Phi(t_0 + h))|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \left| \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h))}{h} \right| = \left| \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h))}{h} \right| =$

$= \left| \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h)) - \pi_1(\Phi(t_0))}{h} \right| = |(\pi_1 \circ \Phi)'(t_0)|$

Por outro lado:

$(\pi_2 \circ \Phi)'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\pi_2(\Phi(t_0 + h)) - \pi_2(\Phi(t_0))}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\pi_2(\Phi(t_0 + h))}{h} =$

$= - \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|\pi_1(\Phi(t_0 + h))|}{-h} = - \lim\limits_{h \to 0^-} \left| \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h))}{-h} \right| =$

$= - \lim\limits_{h \to 0^-} \left| \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h))}{h} \right| = - \left| \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h))}{h} \right| =$

$= - \left| \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\pi_1(\Phi(t_0 + h)) - \pi_1(\Phi(t_0))}{h} \right| = - |(\pi_1 \circ \Phi)'(t_0)|$

Assim, $|(\pi_1 \circ \Phi)'(t_0)| = - |(\pi_1 \circ \Phi)'(t_0)|$, ou seja, $(\pi_1 \circ \Phi)'(t_0) = 0$, logo $(\pi_2 \circ \Phi)'(t_0) = 0$ e $\Phi'(t_0) = ((\pi_1 \circ \Phi)'(t_0), (\pi_2 \circ \Phi)'(t_0)) = (0, 0)$, logo Φ não é uma imersão em t_0. Conclui-se que $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ não é a imagem de uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.